Тема лекции №6. Двойственные задачи. Теоремы двойственности.

Цель лекции: Рассмотреть двойственные задачи. Теоремы двойственности.

Конспект лекции: Рассмотрим теперь самую общую задачу линейного программирования, когда ограничения образует *смешанную* систему, состоящую из *неравенств* и *равенств*, а переменные распадаются на *несвободные* и *свободные* т.е. задачу максимизации линейной формы

$$z = p_1 x_1 + ... + p_n x_n$$

при ограничениях - неравенствах

$$a_{i1}x_1 + ...+ a_{in}x_n \le a_i \quad (i=1,..., k),$$

при ограничениях - равенствах

$$a_{i1}x_1 +...+ a_{in}x_n = a_i \quad (i=k+1,..., m),$$

при несвободных переменных

$$x_j \ge 0 \quad (j =1,..., l),$$

при свободных переменных

$$x_j <=> 0 \quad (j =l+1,..., n).$$

Под двойственной к самой общей прямой задаче линейного программирования естественно понимать задачу, заключающуюся в минимизации линейной формы

$$w = a_1u_1+...+a_mu_m$$

при несвободных переменных

$$u_i \ge 0 \quad (i=1,..., k),$$

при свободных переменных

$$u_i >=< 0 \quad (i=k+1,..., m),$$

при ограничениях-неравенствах

$$a_{1j}u_1 + ...+ a_{mj}u_m \ge p_j \quad (j=1,... l),$$

при ограничениях -равенствах

$$a_{1j}u_1 + ...+ a_{mj}u_m = p_j \quad (j=l+1,...,m) .$$

Основная (первая) теорема двойственности

Пусть рассматривается пара двойственных задач (таблица 3). Если одна из них обладает оптимальным решением, то и другая имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения соответствующих целевых функций z и w равны:

$$\max z = \min w$$

Таблица 6.1

		$v_1=$ $-x_1$	...	$v_l=$ $-x_l$	$0=$ $-x_{l+1}$	...	$0=$ $-x_n$	$w=$ 1
u_1	$y_1=$	a_{11}	...	a_{1l}	$a_{1,l+1}$	...	a_{1n}	a_1
...		...	...	...	...	...	...	...
u_k	$y_k=$	a_{k1}	...	a_{kl}	$a_{k,l+1}$	...	a_{kn}	a_k
u_{k+1}	$0=$	$a_{k+1,1}$	...	$a_{k+1,l}$	$a_{k+1,l+1}$	...	$a_{k+1,n}$	a_{k+1}
...		...	...	...	...	...	...	...
u_m	$0=$	a_{m1}	...	a_{ml}	$a_{m,l+1}$	...	a_{mn}	a_m
1	$z=$	$-c_1$	...	$-c_l$	$-c_{l+1}$	...	$-c_n$	0

Если же у одной из этих задач целевая функция не ограничена, то двойственная ей задача противоречива. Наконец, если одна из этих задач противоречива, то двойственная ей задача либо имеет неограниченную целевую функцию, либо так же противоречива..

Вторая теорема двойственности.

Для того чтобы два допустимых решения **$x'=(x'_1,...,x'_n)$** *и* **$u'=(u'_1,...,u'_m)$** *пары двойственных задач* (табл.6.1) *были оптимальными необходимо и достаточно, чтобы эти решения удовлетворяли так называемым "условиям дополняющей нежесткости":*

$$1)\ x'_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u'_i - c_j\right) = 0 \qquad (j = 1,...,n)$$

$$2)\ u'_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j - a_i\right) = 0 \qquad (i = 1,...,m)$$

т.е. чтобы равнялось 0 произведение значения любой переменной одной задачи на разность между значениями левой и правой части соответствующего ограничения двойственной задачи. Другими словами, допустимые решения **x'** и **u'** оптимальны тогда и только тогда, когда они удовлетворяют следующему условию: если значение какой-либо переменной допустимого решения одной задачи отлично от нуля, то допустимое решение двойственной задачи обращает в строгое равенство соответствующие этой переменной ограничение двойственной задачи, а если допустимое решение одной задачи обращает в строгое неравенство некоторое ограничение этой задачи, то в допустимом решении двойственной задачи равна нулю переменная, соответствующая этому ограничению.

Правила построения двойственной задачи в ЛП

Общая задача:

1.Определение двойственных переменных, т.е. переменных двойственной задачи. Обозначим через y_i- переменную двойственной задачи. Для того, чтобы определить двойственную переменную берут вектор y, который соответствует вектору b, т.е. каждому уравнению ограничения исходной задачи в соответствии берется двойственная переменная (y_i), таким образом сколько уравнений ограничения в двойственной задачи столько переменных, таким образом количество двойственных переменных равно количеству y-й ограничений исходной задачи. Переменные двойственной задачи соответствующие уравнениям ограничения заданных в виде неравенств задаются условиями на неотрицательность, а переменные соответствующие уравнениям заданным в виде равенств являются свободными переменными, т.е. на них не накладываются ограничения.

2. Определение целевой функции двойственной задачи. Целевая функция двойственной задачи строится путем соответственного умножения свободных членов исходной задачи (b_i) на двойственный переменные (y_i), т.е. путем умножения транспонированного вектора (b) на вектор (y). При этом целевая функция двойственной задачи стремится на min, если исходная задача была на max (или наоборот).

3. Построение уравнений ограничения двойственной задачи.

Например: Ax≤0 теперь имеем $A_{nxm} \to A^{T}_{mxn} \cdot y \geq c$

Двойственная задача к двойственной дает исходную задачу.

Контрольные вопросы:

1. Первая теорема двойственности.
2. Вторая теорема двойственности.
3. Правило построения двойственной задачи.

Литература:

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах, Изд. "Высшая школа" 1986.
2. Бурков В.Н., Кулжабаев Н.М. Активные системы и деловые игры– Алматы:2000.
3. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.
4.Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология – Москва: Наука, 1988
5.Зуховицкий С.И. Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование, Изд. "Наука". Москва 1967.
6.Кулжабаев Н.М. Исследование операции. Учебное пособие. –Алматы:РИК КАО имени И.Алтынсарина,1999.
7.Кулжабаев Н.М. Муханова Г.С. Системный анализ и исследование операции.